Matematyka w Excelu dla szkół średnich. Ćwiczenia praktyczne. Wydanie II

Autor: Andrzej Obecny
ISBN: 83-7197-857-X
Format: B5, stron: 140

Czy można zmusić Excela do rozwiązywania szkolnych zadań matematycznych? Okazuje się, że tak. Aby się o tym przekonać, wystarczy sięgnąć po tę książkę. Stanowi ona zbiór kilkudziesięciu ćwiczeń z różnych działów matematyki z zakresu szkoły średniej. Autor przystępnie wyjaśnia, jak za pomocą popularnego arkusza kalkulacyjnego znaleźć rozwiązanie zadań matematycznych, w przypadku których tradycyjne metody analityczne nie sprawdzają się lub są zbyt czasochłonne.
Każde z zaproponowanych przez autora ćwiczeń ma charakter uniwersalny i zachęca do własnych poszukiwań, a przy tym ich wykonanie nie zajmuje więcej niż jedną godzinę lekcyjną. Jest to zatem idealne narzędzie nie tylko dla uczniów, ale i dla nauczycieli matematyki i informatyki.

Wydawnictwo Helion
ul. Chopina 6
44-100 Gliwice
tel. (32)230-98-63
e-mail: helion@helion.pl

Spis treści

Rozdział 15.

Ekstremum funkcji y=f(x)

Wprowadzenie

Drugim ważnym elementem charakterystyki funkcji obok miejsc zerowych są ekstrema, czyli maksima i minima. Przypomnijmy, że funkcja ma maksimum lokalne w punkcie x_0 wewnątrz przedziału <a; b>, kiedy dla wszystkich wartości x z tego przedziału zachodzi nierówność $f(x)<f(x_0)$. Analogicznie określa się minimum lokalne funkcji.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym tego, aby w punkcie x_0 funkcja miała maksimum, jest to, by pierwsza pochodna w tym punkcie była równa zero, zaś druga pochodna miała wartość ujemną.

W naszych ćwiczeniach — podobnie jak w przypadku całki oznaczonej — wyznaczanie ekstremów wykonany metodami przybliżonymi, bo do takich metod wykorzystać możemy Excela.

W ćwiczeniach z tego rozdziału, dysponując wykresem funkcji, wyznaczymy najpierw maksimum, a potem minimum funkcji. Każde z tych ekstremów obliczymy dwoma sposobami, budując odpowiednie formuły oraz pisząc makropolecenie.

Ćwiczenie 15.1.

Wyznacz maksimum lokalne funkcji $f(x)=x^3-5x^2+4x+3$, przyjmując, że w punkcie x_{max} jest maksimum, z dopuszczalnym błędem ±0,01.

Sposób rozwiązania

Sposób, w jaki rozwiążemy to ćwiczenie, nie będzie się wiele różnił od sposobu wyznaczania miejsc zerowych. Także tutaj rozpoczniemy od wykonania wykresu funkcji i na podstawie jego analizy wyznaczymy przedziały liczbowe, w których znajdują się ekstrema.

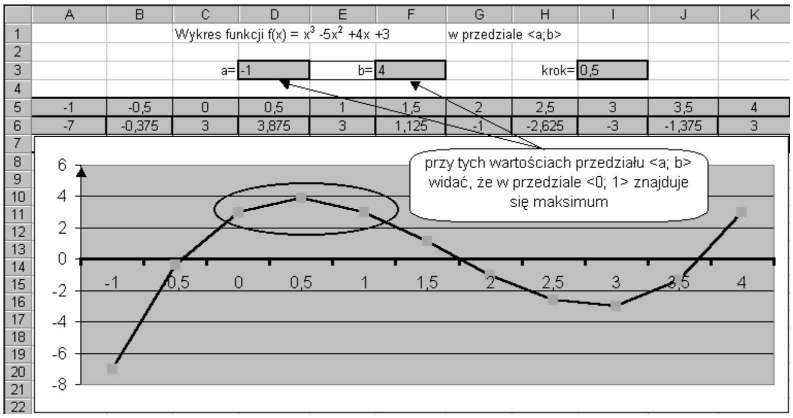
Sposób wykonania wykresu funkcji omówiono w ćwiczeniu 13.2. Jeżeli na podstawie wykresu będzie można stwierdzić, że istnieją ekstrema, oszacujemy przedziały, w których się one znajdują. Załóżmy, że takie przedziały poznaliśmy. By obliczyć maksimum, wykonamy tabelę iksów i igreków. Następnie przyglądać się będziemy wartościom funkcji w poszczególnych komórkach arkusza (rozpoczynając od lewej strony przedziału), znajdując punkt (komórkę), w której wartości funkcji przestają rosnąć. Gdy go znajdziemy, co musi się stać przy przyjętych przez nas założeniach, możemy punkt ten uznać za maksimum funkcji w zadanym przedziale.

Pamiętać musimy, że wyznaczony punkt x_{max} nie będzie prawdopodobnie rzeczywistym maksimum, bowiem został wybrany spośród ograniczonej liczby punktów przedziału. Przy podziale badanego odcinka na jeszcze mniejsze znajdzie się zapewne inny punkt maksymalny x_{max}. Musimy więc uściślić nasze rozwiązanie o stwierdzenie, że wyznaczyliśmy maksimum z konkretnym dopuszczalnym błędem. Zatem w naszym ćwiczeniu, aby spełnić warunki postawione w jego treści, musimy obliczać wartości funkcji w punktach oddalonych od siebie co najwyżej o 0,01.

Rozwiązanie

1. Sporządź wykres funkcji (na jego podstawie oszacujemy przedziały, w których znajdują się ekstrema).

Rysunek 15.1.
Rysunek pomocniczy do ćwiczenia 15.1



Na podstawie rysunku możemy przyjąć, że maksimum leży między 0 a 1. Ponadto w przedziale <-1; 4> znajdują się jedyne ekstrema funkcji na całej osi liczbowej, co wynika z postaci funkcji.

2. Utwórz w pierwszym wierszu arkusza arytmetyczny ciąg liczbowy, wypełniając tabelę iksów.

   Do komórki *A1* nowego skoroszytu wpisz liczbę `-0`. Następnie, wypełniając serią danych, wprowadź do sąsiednich komórek ciąg liczbowy o kroku 0,01 i wartości końcowej 1.

3. W drugim wierszu wpisz formułę obliczającą wartości funkcji dla poszczególnych punktów z pierwszego wiersza.

   Do komórki *A2* wpisz formułę `=A1^3-5*A1^2+4*A1+3`. Następnie przekopiuj ją do komórek sąsiednich drugiego wiersza (aż do komórki o adresie *CW2*).

4. Znajdź miejsce, w którym funkcja osiąga wartość największą.

AR	AS	AT	AU	AV	AW	AX
0,43	0,44	0,45	0,46	0,47	0,48	0,49
3,875007	3,877184	3,878625	3,879336	3,879323	3,878592	3,877149

maksimum lokalne funkcji f(x)=x^3-5x^2+4x+3

Rysunek 15.2. *Wygląd fragmentu arkusza z rozwiązaniem ćwiczenia 15.2*

Ćwiczenie 15.2.

Napisz makropolecenie, wyznaczające maksimum lokalne funkcji $f(x)=x^3-5x^2+4x+3$, przyjmując, że w punkcie x_{max} jest maksimum, z dopuszczalnym błędem ±0,01.

Sposób rozwiązania

Najpierw w nowym arkuszu do wybranych komórek wpiszemy określone wartości początkowe, którymi będą końce przedziału (zmienne `a`, `b`), dokładność (zmienna `c`) oraz formuła obliczająca wartość funkcji w punkcie a (zmienna `y`). Makropolecenie będzie się odwoływało do tych komórek, a niektóre z nich modyfikowało.

Samo makro rozpoczniemy od wczytania tych komórek do podanych wyżej zmiennych oraz przypisania szukanemu maksimum (zmienna `max`) wartości zmiennej `a`. Następnie utworzymy pętlę (instrukcja `Do...Loop While`), w której na początek zmienną `max` powiększymy o przyjętą dokładność. Wartość tę wpiszemy do komórki *E5* i odczytamy wartość funkcji w tym nowym punkcie (zmienna `z`). Mając wartości funkcji w dwóch sąsiednich punktach (*y* oraz *z*), sprawdzimy, która z nich jest większa. Jeżeli będzie nią *y* (lub przynajmniej będzie ona równa *z*), będzie to oznaczać, że wartości funkcji przestały rosnąć i znaleźliśmy maksimum. Gdy będzie odwrotnie, to wartość zmiennej `z` podstawimy do zmiennej `y` i rozpoczniemy ponownie instrukcje zawarte w pętli. Oznaczać to będzie, że rozpoczęliśmy porównywanie wartości funkcji w dwóch punktach przesuniętych (względem poprzednich dwóch punktów) o wielkość przyjętej dokładności. Jeżeli zakładamy, że w zadanym przedziale <a; b> istnieje maksimum, to pętla musi się zakończyć, zanim zmienna `max` osiągnie wartość końca przedziału.

Rozwiązanie

1. Rozmieść w arkuszu elementy tekstowe.

Wprowadź do nowego skoroszytu dane tekstowe zgodnie z rysunkiem 15.3.

	C	D	E	F	G	H
1						
2						
3						
4		a	max	b	c	
5	x=					
6	f(x)=					
7						

Rysunek 15.3. *Rysunek pomocniczy do ćwiczenia 15.2*

2. Utwórz nowe makropolecenie.

Naciśnij klawisze *Alt+F8*. Następnie w polu *nazwa makra* wpisz *maksimum_lokalne*, po czym kliknij przycisk *Utwórz*.

3. Wpisz makro *maksimum_lokalne*.

Uzupełnij procedurę kodem, zgodnie z poniższym tekstem.

```
Sub maximum_lokalne()
Dim a, b, c, y, z, max As Single
a = Range("d5").Value
b = Range("f5").Value
c = Range("g5").Value
y = Range("d6").Value
max = a
Do
max = max + c
Range("e5").Value = max
z = Range("e6").Value
If y >= z Then
Exit Sub
End If
y = z
Loop While max <= b
End Sub
```

4. Zamknij edytor Visual Basica i powróć do *Arkusza1* Excela.

Użyj klawiszy *Alt+Q*.

5. Wstaw do arkusza przycisk polecenia i przypisz do niego napisane makropolecenie.

Z paska narzędziowego *Formularze* wybierz *Przycisk* i umieść go na środku arkusza. Następnie, gdy otworzy się okno z listą dostępnych makropoleceń, wskaż kliknięciem makro *maksimum_lokalne* i zaakceptuj wybór przyciskiem *OK*.

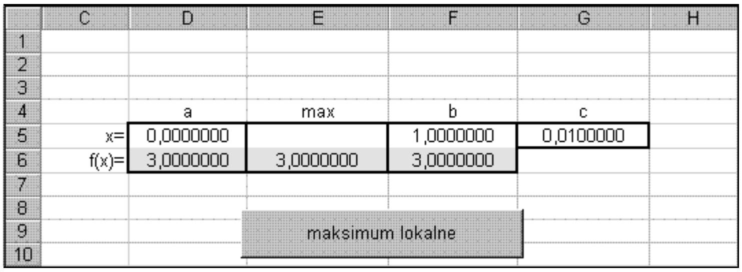
6. Zmień domyślny tekst umieszczony na przycisku.

Ustaw kursor na przycisku i naciśnij prawy przycisk myszy, następnie wybierz opcję *Edytuj tekst* i wpisz tekst *maksimum lokalne*.

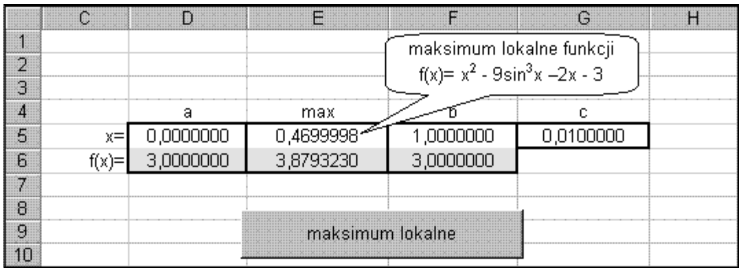
7. Oblicz maksimum lokalne badanej funkcji.

Do komórek *D5*, *F5* i *G5* wpisz kolejno: `0`, `1` oraz `0,01`. Następnie do komórki *D6* wpisz formułę `=D5^3-5*D5^2+4*D5+3` i przekopiuj jej zawartość do obszaru *E6÷F6*. Na koniec uruchom makro, klikając przycisk *maksimum lokalne*.

Rysunek 15.4.
Rysunek pomocniczy (przed uruchomieniem makra) do ćwiczenia 15.2



Rysunek 15.5.
Wygląd fragmentu arkusza z rozwiązaniem ćwiczenia 15.2



Ćwiczenie 15.3.

Wyznacz minimum lokalne funkcji $f(x)=x^2–9sin^3x–2x–3$, przyjmując, że w punkcie x_{min} jest minimum, z dopuszczalnym błędem ±0,001.

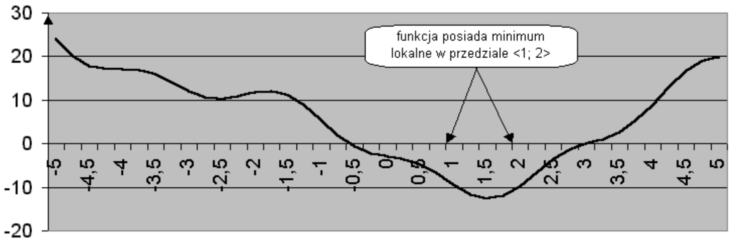
Sposób rozwiązania

Minimum wyznaczymy w ten sam sposób, w jaki wyznaczyliśmy maksimum. Różnica polegać będzie oczywiście tylko na tym, że tym razem szukać będziemy wartości najmniejszej. Zadana jest większa dokładność, więc obliczenia przeprowadzimy w wierszach arkusza (zabrakłoby nam kolumn przy tak dużej wymaganej dokładności).

Rozwiązanie

1. Sporządź wykres funkcji (na jego podstawie oszacujemy przedziały, w których znajduje się minimum).

Rysunek 15.6.
Rysunek pomocniczy do ćwiczenia 15.3



Na podstawie rysunku możemy przyjąć, że minimum leży między 1 a 2.

2. Utwórz w kolumnie pierwszej arkusza arytmetyczny ciąg liczbowy, wypełniając tabelę iksów.

   W nowym, pustym skoroszycie do komórki *A1* wpisz liczbę `1`. Następnie, wypełniając serią danych, wprowadź do sąsiednich komórek ciąg liczbowy o kroku 0,001 i wartości końcowej 2.

3. W kolumnie drugiej wpisz formułę obliczającą wartości funkcji dla poszczególnych punktów z pierwszej kolumny.

   Do komórki *B1* wpisz formułę `=A1^2-9*(SIN(A1))^3-2*A1-3`. Następnie przekopiuj ją do komórek sąsiednich drugiej kolumny (aż do komórki o adresie *B1001)*.

4. Znajdź miejsca, w których funkcja osiąga wartość najmniejszą.

Rysunek 15.7.
Wygląd fragmentu arkusza z rozwiązaniem ćwiczenia 15.3

530	1,529	-12,696599				
531	1,53	-12,696653				
532	1,531	-12,696678				
533	1,532	-12,696674				
534	1,533	-12,696641				
535	1,534	-12,69658				
536	1,535	-12,696489				
537	1,536	-12,69637				

minimum funkcji
$f(x)= x^2 - 9\sin^3 x - 2x - 3$

Ćwiczenie 15.4.

Napisz makropolecenie wyznaczające minimum lokalne funkcji $f(x)=x^2-9\sin^3 x-2x-3$*, przyjmując, że w punkcie* x_{min} *jest minimum, z dopuszczalnym błędem* $\pm 0{,}001$.

Sposób rozwiązania

Rozwiązanie to nie będzie się różniło od tego, jakie przedstawiliśmy w przypadku szukania maksimum lokalnego. W przedstawionym tam algorytmie należy jedynie wziąć pod uwagę (i zmienić), że teraz szukamy wartości najmniejszej, jaką przyjmuje funkcja w zadanym przedziale liczbowym <a; b> (patrz ćwiczenie 15.2).

Rozwiązanie

1. Rozmieść w arkuszu elementy tekstowe.

Wprowadź do nowego skoroszytu dane tekstowe zgodnie z rysunkiem 15.8.

Rysunek 15.8.
Rysunek pomocniczy do ćwiczenia 15.4

C	D	E	F	G	H
	początek przedz.	min	koniec przedz.	krok	
x=					
f(x)=					

2. Utwórz nowe makropolecenie.

Naciśnij klawisze *Alt+F8*. Następnie w polu *nazwa makra* wpisz *minimum_lokalne*, po czym kliknij przycisk *Utwórz*.

3. Wpisz makro *minimum_lokalne*.

Uzupełnij procedurę kodem, zgodnie z poniższym tekstem.

```
Sub minimum_lokalne()
Dim a, b, c, y, z, min As Single
a = Range("d5").Value
y = Range("d6").Value
c = Range("g5").Value
b = Range("f5").Value
min = a
Do
```

```
min = min + c
Range("e5").Value = min
z = Range("e6").Value
If y < z Then
Exit Sub
End If
y = z
Loop While min <= b
End Sub
```

4. Zamknij edytor Visual Basica i powróć do *Arkusza1* Excela.

   Użyj klawiszy *Alt+Q*.

5. Wstaw do arkusza przycisk polecenia i przypisz do niego napisane makropolecenie.

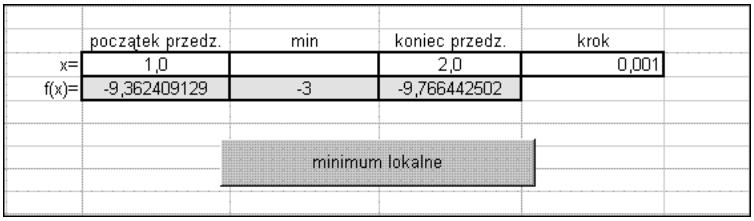
   Z paska narzędziowego *Formularze* wybierz *Przycisk* i umieść go na środku arkusza. Następnie, gdy otworzy się okno z listą dostępnych makropoleceń, wskaż kliknięciem makro *minimum_lokalne* i zaakceptuj wybór przyciskiem *OK*.

6. Zmień domyślny tekst umieszczony na przycisku.

   Ustaw kursor na przycisku i naciśnij prawy przycisk myszy, następnie wybierz opcję *Edytuj tekst* i wpisz tekst *minimum lokalne*.

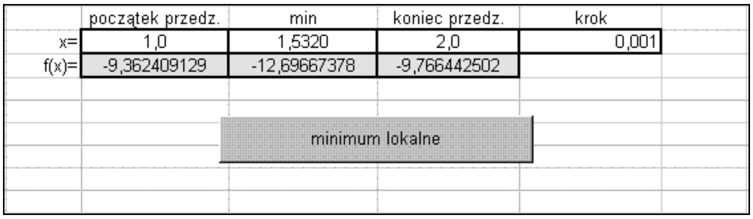
7. Oblicz minimum lokalne badanej funkcji.

   Do komórek *D5*, *F5* i *G5* wpisz kolejno: `1`, `2` oraz `0,001`. Następnie do komórki *D6* wpisz formułę `=D5^2-9*(SIN(D5))^3-2*D5-3` i przekopiuj jej zawartość do obszaru *E6÷F6*. Na koniec uruchom makro, klikając przycisk minimum lokalne.



	początek przedz.	min	koniec przedz.	krok
x=	1,0		2,0	0,001
f(x)=	-9,362409129	-3	-9,766442502	

Rysunek 15.9. *Rysunek pomocniczy (przed uruchomieniem makra) do ćwiczenia 15.4*



	początek przedz.	min	koniec przedz.	krok
x=	1,0	1,5320	2,0	0,001
f(x)=	-9,362409129	-12,69667378	-9,766442502	

Rysunek 15.10. *Wygląd fragmentu arkusza z rozwiązaniem ćwiczenia 15.4*

Podsumowanie

Rozwiązanie za pomocą formuł uzyskuje się, jak się przekonaliśmy, bardzo szybko. Trochę więcej czasu poświęcić potrzeba na napisanie makra. W obu zaproponowanych sposobach należy rozpocząć od określenia przedziałów, w których znajdują się szukane ekstrema.

W pierwszych dwóch ćwiczeniach mieliśmy do czynienia z wielomianem, więc z tego faktu oraz z wykresu funkcji w przedziale <0; 1> wynikało, że istnieje maksimum lokalne w tym przedziale. Uzyskane rozwiązanie musi być takie samo, jak przy zastosowaniu rachunku pochodnych.

Obliczmy pierwszą pochodną i znajdźmy jej miejsca zerowe:

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + 3;$$
$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 4;$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 4 = 0.$$

I dalej:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 100 - 48 = 52.$$

Zatem:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 + \sqrt{52}}{6} \approx 2{,}87;$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 - \sqrt{52}}{6} \approx 0{,}46.$$

W naszym przypadku interesuje nas x_2. Obliczmy drugą pochodną i znak drugiej pochodnej w punkcie x_2:

$$f''(x) = 6x - 10;$$
$$f''(x_2) = f''(0{,}46) = 6 \cdot 0{,}46 - 10 = 2{,}76 - 10 = -7{,}24 < 0.$$

Jak widać, uzyskany drogą algebraiczną wynik nie różni się od naszego rozwiązania uzyskanego metodą przybliżoną. Rozwiązanie uzyskaliśmy po prostych rachunkach, jednak ta sama metoda algebraiczna w przypadku ćwiczeń 15.3 i 15.4 nie będzie mogła znaleźć zastosowania. W tych ćwiczeniach szukaliśmy maksimum funkcji $f(x)= x^2-9\sin^3 x-2x-3$. Znalezienie miejsc zerowych pierwszej pochodnej będzie niemożliwe drogą rachunkową!

Reasumując, okazuje się, że metoda przybliżona jest skuteczniejsza, jeśli chodzi o łatwość znalezienia rozwiązania.

Rozdział 16.

Wykres funkcji dwóch zmiennych z=f(x,y)

Wprowadzenie

Funkcję dwóch zmiennych, której wykres niełatwo jest sobie wyobrazić, wykonać można także w prosty sposób w arkuszu Excela. W jednym ćwiczeniu z tego rozdziału przygotujemy taki arkusz, dzięki któremu można będzie obserwować, jak zmieniać się będzie kształt wykresu funkcji dwóch zmiennych w zależności od zmian wartości jej argumentów. Arkusz ten przygotujemy, używając formuł, a dodatkowo wstawimy w nim paski przewijania, by łatwiej było obserwować zmiany wykresu.

Ćwiczenie 16.1.

Sporządź wykres funkcji $f(x,y)=sin(x/a)cos(y/b)$ dla $x, y \in \langle -\pi; \pi \rangle$, dla następujących wartości parametrów a i b:

1. a=1, b=1;
2. a=10, b=1;
3. a=2, b=2.

Sposób rozwiązania

Podobnie jak robiliśmy to w przypadku wykresu funkcji jednej zmiennej, tak i tu potrzebne będzie tablicowanie funkcji.